令和６年度　入学者選抜学力検査問題

数　　学　（理系 β）

数学Ⅰ，数学Ａ
数学Ⅱ，数学Ｂ
数学Ⅲ

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で４題あります。また，解答用紙は４枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に２箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。また，解答欄が指定されている場合は，解答欄の枠の中に答を記入してください。
6. 裏面その他に解答を記入した場合，その部分は採点の対象となりません。
7. 答のみを記入するように指定されている場合は答のみを，そうでない場合は必要な計算・論証・説明などを省かずに解答してください。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

$\boxed{\beta}$

〔1〕 (配点 50)　a を定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し

$$C=\int_0^1 f(x)g(a-x)\,dx$$

と定めたとき，次の $f(x)$, $g(x)$ について C をそれぞれ a を用いて表しなさい。

(1) $f(x)=x,\ \ g(x)=x^2$

(2) $f(x)=\sin \pi x,\ \ g(x)=x$

(3) $f(x)=x,\ \ g(x)=\begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$

〔2〕 (配点 50) m を 0 以上の整数とし，k，r を自然数とする。k の正の約数の個数を $D(k)$ とおく。また，$\dfrac{k}{r^m}$ が整数となるような整数 m のうち最大のものを $M_r(k)$ とする。例えば，$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ なので $M_2(60) = 2$，$M_3(60) = 1$ である。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，(1)，(2)の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

(1) $M_2(8!)$ および $D(8!)$ の値を求めなさい。

(2) $M_2(30!)$，$M_3(30!)$ および $M_{12}(30!)$ の値を求めなさい。

(3) $d = D(30!)$ とおく。(2)で求めた $M_{12}(30!)$ の値を n とするとき，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D\left(\frac{30!}{12^i}\right)$ を d を用いて表しなさい。

〔3〕 (配点 50) 動点Rが正四面体OABCの辺上を動く。動点Rは時刻 $t=0$ のとき点Oにあり，時刻が1進むごとに，他の3つの頂点のいずれかにそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で移動しているか，$\dfrac{1}{2}$ の確率で元の頂点にある。このとき，次の問いに答えなさい。ただし，(1)の解答は答のみを解答用紙の所定の解答欄に記入しなさい。

(1) (i) 時刻 $t=2$ のとき，Rが点Oにある確率を求めなさい。

(ii) 時刻 $t=2$ のとき，Rが点Aにある確率を求めなさい。

(iii) 時刻 $t=3$ のとき，Rが点Aにある確率を求めなさい。

(iv) 時刻 $t=3$ においてRが点Aにあるとき，時刻 $t=2$ のときにRが点Oにあった条件付き確率を求めなさい。

(2) n を自然数とする。時刻 $t=n$ のとき動点RがO，A，B，Cの各頂点にある確率をそれぞれ z_n，a_n，b_n，c_n とする。

(i) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明しなさい。

$$a_n = b_n = c_n$$

(ii) z_n を n の式で表しなさい。

(iii) 極限 $\lim_{n \to \infty} z_n$ を求めなさい。

〔4〕 （配点 50） 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (x - [x])^2 - (x - [x]) + \frac{1}{6} \quad (x \geqq 0)$$

と定める。ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。さらに，n を自然数とし，

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n} + x\right) \quad (x \geqq 0)$$

とする。次の問いに答えなさい。

(1) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$f(x+1) = f(x)$$

(2) 次の等式が成り立つことを示しなさい。

$$S\left(x + \frac{1}{n}\right) = S(x)$$

(3) $0 \leqq x < \dfrac{1}{n}$ のとき，方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい。

(4) $x \geqq 0$ のとき，方程式 $S(x) = 0$ を解きなさい。