令和８年４月期入学（第２回）　創成科学研究科博士前期課程（理学系）
入学者選抜試験　基盤科学系専攻　物理学コース　解答例

問題１　解答例

(1) $Ma = Mg\sin\theta - f$

(2) $I\alpha = rf$

(3) $a = g\sin\theta$

(4) $a = r\alpha$

(5) $a = \dfrac{g\sin\theta}{1 + I/Mr^2}$

(6) $I = \dfrac{1}{2}Mr^2$,　$a = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

(7) $I = Mr^2$,　$a = \dfrac{1}{2}g\sin\theta$

問題2 解答例

(1) 今$|\boldsymbol{E}| = E$，$|\boldsymbol{B}| = B$より，

電子が電場から受けるx方向の力は$-eE$，一方磁場から受けるx方向のローレンツ力はev_0B

よって直線運動を続けるには力の釣り合いから

$$ev_0B - eE = 0 \text{ より } B = E/v_0$$

となればよい。

(2) x方向: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -eE + ev_zB$

y方向: $m\frac{d^2y}{dt^2} = 0$

z方向: $m\frac{d^2z}{dt^2} = -ev_xB$

(3) 今y方向の運動方程式は独立なので，vx, z方向の運動方程式を連立させると

v_zについての微分方程式は

$$v''_z + \omega^2 v_z - \frac{E}{B}\omega^2 = 0$$

となる。

(4) (3)の方程式の解を$v_z = a\cos(\omega t) + b$とおいて代入すると

$$+\omega^2 b - \frac{E}{B}\omega^2 = 0 \to b = \frac{E}{B}$$

初期条件より$t = 0$で初速は 0 なので

$$a\cos 0 + b = 0 \text{ より } a = -b = -\frac{E}{B}$$

従って $v_z = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t)$ となる。

また b 運動方程式より $v'_z = -\omega v_x$，よって $v_x = -\frac{E}{B}\sin\omega t$

ところで初期条件より $v_y = 0$

以上より，

$$v_x = -\frac{E}{B}\sin\omega t$$

$$v_y = 0$$

$$v_z = \frac{E}{B}(1 - \cos\omega t)$$

(5) 初期条件として $t=0$ で原点にいることを考慮して積分すると

$$x=\frac{E}{B\omega}\cos\omega t-\frac{E}{B\omega}$$

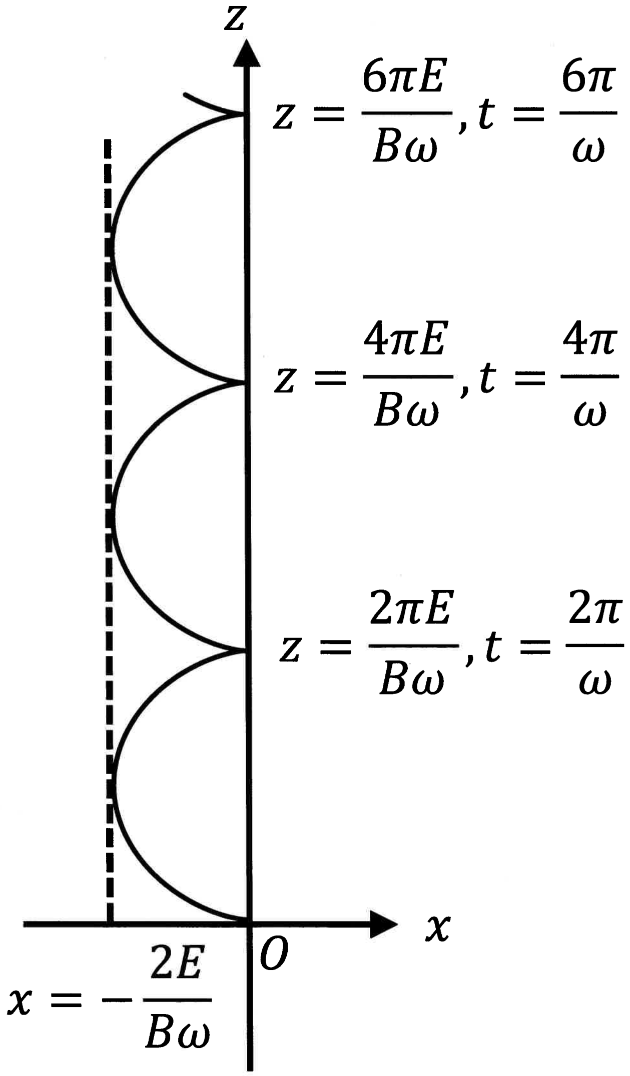
$$y=0$$

$$z=\frac{E}{B}t-\frac{E}{B\omega}\sin\omega t$$

となる。

(6) 図示すると下図のようになる。

電子は$x=0$ と$x=-\frac{2E}{B\omega}$の間を振動しながらz方向に加減速しながら進む。



問題 3　解答例

(1) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad (0 < x < L)$

(2) $\psi(0) = 0, \quad \psi(L) = 0$

(3) 固有値 $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$，固有状態 $\psi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi x}{L}\right)$

(4) 規格化条件

$$\int_0^L |\Psi(x,0)|^2 dx = 1$$

から，

$$A^2\int_0^L \left[\sin^2\frac{\pi x}{L} + \sin^2\frac{2\pi x}{L} + 2\sin\frac{\pi x}{L}\sin\frac{2\pi x}{L}\right] dx = 1$$

交差項は積分すると 0 になるため，

$$A^2\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\right) = A^2 L = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

(5) 初期状態は

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\sin\frac{\pi x}{L} + \sin\frac{2\pi x}{L}\right]$$

であり，固有状態は $\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$ である。よって展開係数 c_n は

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_n = 0\ (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

よって，エネルギー測定の確率は

$$P(E_1) = |c_1|^2 = \frac{1}{2}, \quad P(E_2) = |c_2|^2 = \frac{1}{2}, \quad P(E_{n\geq 3}) = 0.$$

(6) $\Psi(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{L}}\left[e^{-iE_1 t/\hbar}\sin\dfrac{\pi x}{L} + e^{-iE_2 t/\hbar}\sin\dfrac{2\pi x}{L}\right]$

問題 4　解答例

(1) 1粒子の分配関数：

$$Z_1 = e^{-E_0/k_BT} + e^{-E_1/k_BT} = 1 + e^{-\varepsilon/k_BT}$$

全系の分配関数：

$$Z = Z_1^N = \left(1 + e^{-\varepsilon/k_BT}\right)^N$$

(2) 1粒子の平均エネルギー：

$$\langle E \rangle = \frac{\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT} + 1}$$

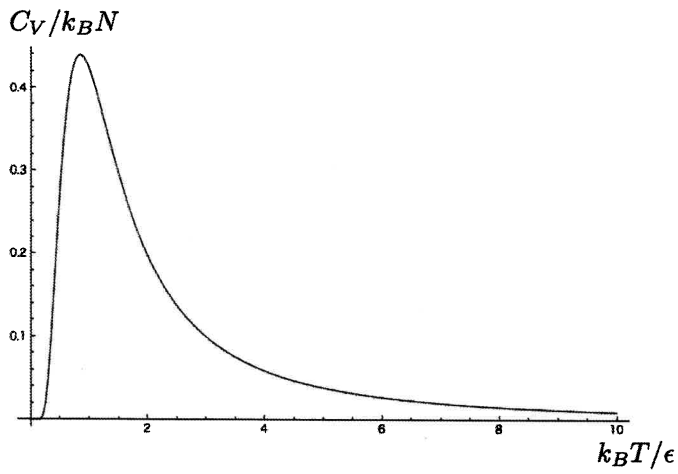
(3) 内部エネルギー：

$$U = N\langle E \rangle = \frac{N\varepsilon}{e^{\varepsilon/k_BT} + 1}$$

(4) 熱容量：

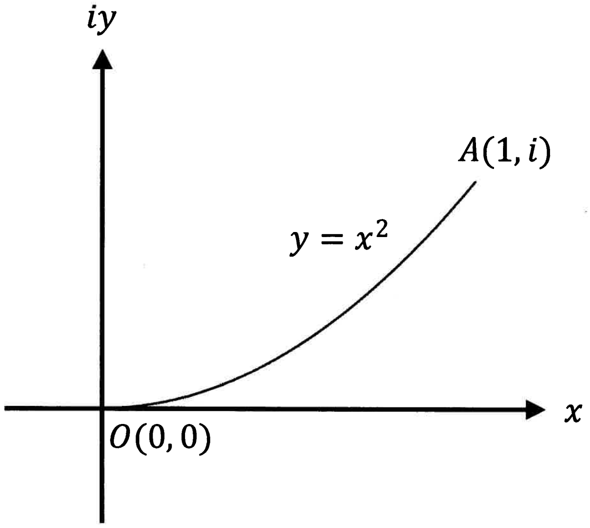
$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = Nk_B\left(\frac{\varepsilon}{k_BT}\right)^2 \frac{e^{\varepsilon/k_BT}}{(1 + e^{\varepsilon/k_BT})^2}$$

(5) 高温極限 $k_BT \gg \varepsilon$ では $C_V \to 0$（粒子はほぼ励起状態にあるためエネルギー変化が小さい）。低温極限 $k_BT \ll \varepsilon$ でも $C_V \to 0$（熱エネルギーが小さく基底状態から励起が起こらない）。中間温度で最大となる。



問題5　解答例

(1) 経路Cを図示すると下図のようになり，端点OからAの間で$y=x^2$の関係がある。



(2) $dz=(1+2is)ds$ より

$$\int_C f(z)dz=\int_0^1 (s+is^2)^2(1+2is)ds= \int_0^1 (s^2-5s^4)+i(4s^3-2s^5)\,ds=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

(3) $dz=dx+idy$ より

$$\int_C f(z)dz=\int_C \{u(x,y)+iv(x,y)\}dz=\int_C (u+iv)\,(dx+idy)$$

$$=\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx)$$

ここで$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy$ より $u=x^2-y^2, v=2xy$

さらに$y=x^2$ なので $dy=2xdx$とすると

$$\int_C (udx-vdy)+i\int_C (udy+vdx)=\int_0^1 (x^2-5x^4)dx+i\int_0^1 (4x^3-2x^5)dx=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}i$$

(4) $y''-4y=0$ に対して$y=e^{\lambda x}$を仮定して代入すると

特性方程式は

$$(\lambda^2-4)=0 \text{ なので } \lambda=\pm 2$$

よって一般解は $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$となる（C_1, C_2は積分定数）。

(5) 方程式の形から解はe^{2x}を含んでいる必要がある。

例えば$\mathrm{y} = a(x)e^{2x}$と仮定して代入すると

$$y'' = a''e^{2x} + 4a'^{e^{2x}} + 4ae^{2x}$$

$$a''e^{2x} + 4a'^{e^{2x}} + 4ae^{2x} - 4ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\{a'' + 4a' - 1\}e^{2x} = 0$$

ここでa''は 2 階微分なのでaをxの 1 次式とすれば無視できる。

このとき $a = \frac{x}{4}$ が上記を満たしていることは明らかである。

よって特解は $\frac{x}{4}\ e^{2x}$ であり

最終的な解は $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + \frac{x}{4}\ e^{2x}$ となる。

問題 6　解答例

(1) $\delta I[y] = \int_a^b \{f(x, y+\delta y, y'+\delta y') - f(x,y,y')\}\,dx = \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx$

$\delta y' = d(\delta y)/dx$ より，2 番目の項の積分は次のように部分積分できる。

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d(\delta y)}{dx} dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'}\delta y\right]_a^b - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx = -\int_a^b \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

$$\delta I[y] = \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y}\delta y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\delta y\right\} dx = \int_a^b \left\{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right\}\delta y dx$$

任意の $\delta y(x)$ に対して $\delta I[y] = 0$ が成り立つとすると，括弧内が 0 という条件が得られる。

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$　この解は $y' =$ 一定

(3) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}}\right) - \frac{\sin\theta\cos\theta\, \varphi'^2}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}} = 0,\quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2\theta\, \varphi'}{\sqrt{\theta'^2 + \sin^2\theta\, \varphi'^2}}\right) = 0$

曲線 $\varphi =$ 一定 は全て解である。曲線 $\theta =$ 一定 のうち，解であるのは $\theta = \frac{\pi}{2}$ のみである。

令和８年度山口大学入試問題「出題の意図」

試験種別（大学院入試：一般選抜　博士前期課程(理学系))
科　　目（専門科目）

※注：この出題の意図についての質問・照会には一切回答しません。

［出題の意図］

問題１
剛体の運動について運動方程式を立てて考える力をみる。

問題２
電磁場中の荷電粒子について運動方程式を立てて考える力をみる。

問題３
１粒子系のシュレーディンガー方程式を書いて解く力をみる。

問題４
カノニカル分布について熱力学量を求める力をみる。

問題５
複素関数を積分する力、及び２階線形常微分方程式を解く力をみる。

問題６
変分原理についての理解度とそれを運用する力をみる。