山口大学理学部　第８号

数理科学科だより

「$(-1)\times(-1)=1$」

「$(-1)\times(-1)=1$」である理由を考えたことがありますか。これは，そうなるように決まっている「定義」ではなく，数学的に証明可能な「命題」です。今回はそれを証明してみましょう。

まず，この数式で使われている記号「1」，「-1」に加え，「0」とは何か，ということを再確認しておきます。ただし，二つの数 a と b に関する計算（二項演算）「$a+b$（和）」，「$a\times b$（積）」，そして，これらを結びつける関係式「$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$（分配法則）」が成り立っていることを仮定しておきます。

> 「1」とは，どのような数 a に対しても「$a\times 1=a$」を満たす数（積に関する単位元）である。
> 「0」とは，どのような数 a に対しても「$a+0=a$」を満たす数（和に関する単位元）である。
> 「$-a$」とは，「$a+(-a)=0$」を満たす数（和に関する a の逆元）である。

これらを用いて，まず「$a\times 0=0$」を証明してみましょう。

$$
\begin{aligned}
a\times 0 &= a\times 0+0=a\times 0+a+(-a) && \cdots(「0」と「-a」の定義より)\\
&= a\times 0+a\times 1+(-a) && \cdots(「1」の定義より)\\
&= a\times(0+1)+(-a) && \cdots(「分配法則」より)\\
&= a\times 1+(-a)=a+(-a) && \cdots(「0」と「1」の定義より)\\
&= 0 && \cdots(「-a」の定義より)
\end{aligned}
$$

上の事実を使い，「$(-1)\times(-1)=1$」は次のように証明されます。

$$
\begin{aligned}
(-1)\times(-1) &= (-1)\times(-1)+0 && \cdots(「0」の定義より)\\
&= (-1)\times(-1)+(-1)+1 && \cdots(「-1」の定義より)\\
&= (-1)\times(-1)+(-1)\times 1+1 && \cdots(「1」の定義より)\\
&= (-1)\times\big((-1)+1\big)+1 && \cdots(「分配法則」より)\\
&= (-1)\times 0+1=0+1 && \cdots(「-1」の定義と「(-1)\times 0=0」より)\\
&= 1 && \cdots(「0」の定義より)
\end{aligned}
$$

負の数の積の計算は，実はこんなに難しかったのです。これからは，子供が「$(-2)\times(-3)=-6$」というような計算ミスをしても，少し多めに見てあげませんか？（文：廣澤）

編集：　山口大学理学部数理科学科
連絡先：　083－933－5211（理学部学務係）
http://www.sci.yamaguchi-u.ac.jp/dep/math/ex