

数理科学科だより

自由な思考の世界

u_j, v_j, c_j は与えられた文字として、次の漸化式を考えてみましょう。

$$w_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j u_k u_{j+1-k} + \sum_{k=1}^{j-1} u_k w_{j-k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{j-1} v_k v_{j-k} + c_j \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (1)$$

上の式は、 w_j を再帰的に定める式です。この漸化式は、高階非線形常微分方程式の一つである 1 型パルヴェ階層の式に現れる漸化式です。添え字の j の値が大きくなるにつれて w_j は大変複雑な式になることがわかるでしょう。

ここで、新しい独立変数 θ を導入し、母関数を用いて違った観点から上の式を書き直してみましょう。 u_j, v_j, w_j, c_j を係数にもつ次の級数を考えます。

$$U(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \theta^k, \quad V(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k \theta^k, \quad W(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \theta^{k+1}, \quad C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \theta^{k+1}.$$

例えば、 $\frac{1}{2}U^2$ を計算してみましょう。 $\frac{1}{2}U^2$ の θ^j の係数は (1) の右辺の第 1 項と等しくなります。同様に、 UW を計算してみると θ^j の係数は (1) の右辺の第 2 項と等しくなります。(1) は次の式と同じ式であると見做すことができます。

$$W = \frac{1}{2}U^2 + UW - \frac{1}{2}V^2\theta + C \quad \text{すなわち} \quad W = \frac{U^2 - V^2\theta + 2C}{2(1-U)}. \quad (2)$$

なぜなら、両辺の θ^j の係数を比較すると、(1) が現れるからです。母関数を用いるという idea 一つで、(2) は (1) よりシンプルな形になりました。初めは一見複雑に見える現象や対象も、厳密な論理で探った時背景に実はとても美しい原理やシンプルな構造が存在していると分かる時、私は感動します。数学という学問は、自由なものの見方、無限に自由な思考の喜びを教えてください。

文責：梅田 陽子

編集：山口大学理学部数理科学科

連絡先：083-933-5210(理学部学務係)

<http://www.sci.yamaguchi-u.ac.jp/dep/math/ex>