山口大学理学部　第19号
数理科学科だより

階乗冪（かいじょうべき）が織り成すパラレルワールド

今回は冪（べき）についてのお話です。冪というのは同じものを何回掛け算したかということを表す言葉で，例えば x^3 は x の 3 次の冪などと呼びます。高等学校で $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ という公式を学びます。これは $x+y$ の 3 次の冪を x と y の冪の足し算で表す公式です。高等学校ではより一般的に 0 以上の整数 n に対して

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^r y^{n-r}$$

が成り立つことを学びます。この等式は二項定理と呼ばれます。ここで ${}_nC_r$ は二項係数と呼ばれる数で

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1}{r \times (r-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-r) \times (n-r-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

によって定義されます。今回は冪の親戚たちをご紹介します。n を 0 以上の整数とするとき上昇冪（じょうしょうべき）と下降冪（かこうべき）をそれぞれ

$$x^{\overline{n}} = x \times (x+1) \times \cdots \times (x+n-2) \times (x+n-1), \quad x^{\underline{n}} = x \times (x-1) \times \cdots \times (x-n+2) \times (x-n+1)$$

で定義します。ただし $x^{\overline{0}} = x^{\underline{0}} = 1$ と約束します。上昇冪と下降冪を合わせて階乗冪（かいじょうべき）と呼びます。普通の冪では同じものを何回か掛けるのですが，上昇冪では 1 ずつ大きくしながら掛けていき，下降冪では 1 ずつ小さくしながら掛けていきます。両者とも n 回の掛け算を行いますが，最初が x から始まっているので，上昇冪は $n-1$ を足した $x+n-1$ で終わり，下降冪は $n-1$ を引いた $x-n+1$ で終わることに注意してください。実はこれらの冪も二項定理

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{\overline{r}} y^{\overline{n-r}}, \quad (x+y)^{\underline{n}} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{\underline{r}} y^{\underline{n-r}}$$

を満たすことが知られています。上昇冪や下降冪の他にも冪の仲間は存在し，例えば

$$x^{\overline{\underline{n}}} = \left(x + \frac{n-1}{2}\right) \times \left(x + \frac{n-3}{2}\right) \times \cdots \times \left(x - \frac{n-3}{2}\right) \times \left(x - \frac{n-1}{2}\right)$$

によって定義される冪も存在します。ただし $x^{\overline{\underline{0}}} = 1$ と約束します。この冪も上昇冪や下降冪と同じように 1 だけ異なるものを順に掛けており，今回の場合は 1 ずつ小さくしながら掛けています。ところがこの冪は

$$(x+y)^{\overline{\underline{2}}} = \left(x+y+\frac{1}{2}\right)\left(x+y-\frac{1}{2}\right) = x^2 + 2xy + y^2 - \frac{1}{4} = x^{\overline{\underline{2}}} + 2x^{\overline{\underline{1}}}y^{\overline{\underline{1}}} + y^{\overline{\underline{2}}} + \frac{1}{4}$$

となるので二項定理を満たしません。実際，最後の定数 $\frac{1}{4}$ が余分です。しかしながら $x^{\overline{\underline{n}}}$ を少し修正して

$$x^{[n]} = x \times x^{\overline{\underline{n-1}}}, \quad x^{[0]} = 1$$

によって新しい冪 $x^{[n]}$ を定義すると

$$(x+y)^{[n]} = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r x^{[r]} y^{[n-r]}$$

となり二項定理を満たすことが確認できます。数学ではよく似た性質を満たす異なる対象がたびたび見受けられます。そのとき一方で知られた事実を他方で見つけられないか調べたり，両者が共有しない性質を見抜くことは重要な話題です。通常の冪が二項定理を満たすことは $(x+y)^n$ を係数に y を含む x の多項式だと考えて x で展開したときに，両辺を x で微分することで対応する係数が求められ証明できます。階乗冪の場合も差分と呼ばれる微分に相当する操作があり，通常の冪の二項定理の微分を用いた証明と同様の議論を行うことで証明できます。よく SF 映画で地球と似た星だが太陽が 2 つあるような星がパラレルワールド（平行宇宙）として登場したりしますが，通常の冪と階乗冪はそれぞれが二項定理を満たし，微分のような操作があるという意味でお互いがパラレルワールドのような関係になっているのです。　（文責：只野 誉・挿絵：いらすとや）

編集：山口大学理学部数理科学科
連絡先：083-933-5210(理学部学務係)
http://www.sci.yamaguchi-u.ac.jp/dep/math/ex