山口大学理学部　　第２３号

数理科学科だより

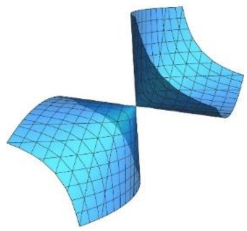
方程式の地図

二次方程式は皆さんにとってなじみ深いものだと思います。実数の範囲で考えれば、二次方程式の実数解の個数は係数の関係によって 0 個、1 個、2 個となることが知られています。では、解の住んでいる世界はどのような形をしているでしょうか？次の二次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

を考えましょう。ここで, a,b,c は実数であり、$a\neq 0$ です。さて、解の個数ですが、それは判別式

$$D=b^2-4ac$$



で判定できます。即ち、$D>0$ のとき実数解が 2 個、$D=0$ のとき実数解が 1 個、$D<0$ のとき実数解なしと結論がつけられます。さて、これを地図として描いてみましょう。判別式 D は、(a,b,c) という 3 変数からなるので、$D=0$ が作る図形は 3 次元空間の中にあります。実際、$D=0$ は、二つの円錐面がくっついた形をしています（右の図）。円錐面の内側が $D<0$ であり、円錐面の外側が $D>0$ です。これはなかなか複雑な図形なので、地図としては良いものとは言い難い気がします。それでは、もっと単純な地図は作れないかと考えてみましょう。まず、上の二次方程式の両辺を a で割ってから平方完成してみます。すると

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}=0$$

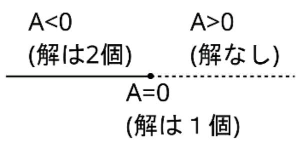
となります。ここで、

$$X=x+\frac{b}{2a},\quad A=\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a}$$

とおくと、考えていた二次方程式は

$$X^2+A=0$$

という形にできます。(すべての二次方程式はこの形に帰着できます。) この方程式の実数解の個数を判定することは簡単で、$A<0$ のときは 2 個、$A=0$ のときは 1 個、$A>0$ のときは 0 個とわかります。このとき、実数解の個数を表す地図は簡単で、次のようになります。



それでは、三次方程式ではどうでしょうか？どんな地図が出来上がるか考えてみてください。（文：寺本）

編集：山口大学理学部数理科学科
連絡先：083-933-5210(理学部学務係)